www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE POLYTECHNIQUE **OPTION P'**

CONCOURS D'ADMISSION 1989

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

Dans tout le problème, on considère des suites de nombres réels à propos desquelles on adopte les notations suivantes : à toute suite α de terme général α_n ($n \in \mathbb{N}$), on associe les deux suites $\beta = T\alpha$ et $\gamma = T^2\alpha$ de termes généraux respectifs

$$\beta_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k \quad \text{et} \quad \gamma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\beta_k \quad .$$

Si $\beta = T\alpha$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que la suite α converge en moyenne vers ℓ, et si $\gamma = T^2\alpha$ converge vers ℓ, on dit que la suite α converge en moyenne itérée vers ℓ.

I

Soient ℓ un nombre réel et α une suite de nombres réels.

1. a. Montrer que si la suite α converge vers ℓ, elle converge en moyenne vers ℓ. Montrer que si la suite α converge en moyenne vers ℓ, elle converge en moyenne itérée vers ℓ.

b. Donner un exemple de suite divergente qui converge en moyenne vers ℓ.

c. Donner un exemple de suite ne convergeant pas en moyenne vers ℓ mais convergeant en moyenne itérée vers ℓ.

d. Montrer que si α tend vers $+\infty$, il en est de même de $T\alpha$ et de $T^2\alpha$.

2. On suppose dans cette question que la suite α est à termes positifs.

a. Montrer que si α converge en moyenne vers 0, il en est de même de la suite de terme général $\sqrt{\alpha_n}$.

b. Montrer que si α est décroissante, la suite de terme général $\alpha_n\sqrt{n}$ converge vers 0 si et seulement si elle converge en moyenne vers 0.

c. Montrer que si α est décroissante, la suite de terme général $n\alpha_n$ converge vers 0 si et seulement si elle converge en moyenne itérée vers 0.

II

Soient u_n ($n \in \mathbb{N}$) le terme général (réel) d'une suite, s la suite des sommes partielles $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et v la suite de terme général nu_n.

1. a. Vérifier la formule $s - Ts = Tv$.

b. Si s converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, montrer que v converge en moyenne vers 0.

c. Si s converge en moyenne vers ℓ, montrer que v converge en moyenne vers 0 si et seulement si la série de terme général u_n converge.

.../...

2. a. Donner un exemple de suite de terme général u_n telle que s converge en moyenne sans que v converge en moyenne vers 0.

b. Etudier, du point de vue de la convergence en moyenne des suites s et v, la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{(n+1)\,\ell n(n+2)}$, où ℓn désigne le logarithme népérien.

c. Montrer que si s converge en moyenne, v converge en moyenne itérée vers 0. La réciproque est-elle exacte ?

3. Dans toute la suite du problème, $\mathcal{C}$ est l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur $\mathbb{R}$, périodiques et de période 2π. On définit les coefficients de Fourier de toute fonction $f \in \mathcal{C}$ par

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \quad (n \in \mathbb{N}).$$

a. Rappeler brièvement pourquoi les suites de termes généraux a_n et b_n convergent vers 0.

b. Montrer que les quatre suites de termes généraux na_n^2, $|a_n|\sqrt{n}$, nb_n^2 et $|b_n|\sqrt{n}$ convergent en moyenne vers 0. Quelles conclusions plus précises obtient-on dans le cas où la suite de terme général $|a_n|$ ou celle de terme général $|b_n|$ est décroissante ?

III

A toute fonction $f \in \mathcal{C}$ on associe sa norme uniforme $\|f\|$ sur $\mathbb{R}$, ses sommes de Fourier $S_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et les fonctions $\sigma_n(f)$ définies par $\sigma_n(f) = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)$.

1. Etablir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les formules

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin\dfrac{(2n+1)(t-x)}{2}}{2\sin\dfrac{t-x}{2}}\,dt \qquad \text{et} \qquad \sigma_n(f)(x) = \frac{1}{\pi(n+1)}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin^2\dfrac{(n+1)(t-x)}{2}}{2\sin^2\dfrac{t-x}{2}}\,dt.$$

2. a. Pour f égale à la constante 1, quelle est la valeur de la fonction $\sigma_n(f)$? En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\dfrac{(n+1)(t-x)}{2}}{2\sin^2\dfrac{t-x}{2}}\,dt.$$

b. Montrer que, pour toute $f \in \mathcal{C}$, $\|\sigma_n(f)\| \leqslant \|f\|$.

3. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(t) = \lambda(t^2 - \pi^2)^2 \quad \text{si } |t| < \pi \quad \text{et} \quad \varphi(t) = 0 \quad \text{si } |t| \geqslant \pi$$

où le réel λ est choisi de façon que $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)dt = 1$.

.../...

a. Montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer λ.

b. Calculer l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(pt)pdt$ pour tout entier $p \geqslant 2$.

c. A toute fonction $f \in \mathcal{C}$ et tout entier $p \geqslant 1$ on associe la fonction f_p définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_p(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)\varphi(pt)pdt .$$

Montrer que f_p est de période 2π et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

d. Montrer que la suite de terme général f_p converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.

4. Soient $f \in \mathcal{C}$, a_n et b_n ($n \in \mathbb{N}$) ses coefficients de Fourier.

a. Montrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, la suite de terme général $\sigma_n(f_p)$ converge vers f_p uniformément sur $\mathbb{R}$, puis que la suite de terme général $\sigma_n(f)$ converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la suite de terme général na_n converge en moyenne itérée vers 0.

5. Dans cette question, on suppose que $f \in \mathcal{C}$ est **impaire.**

a. Montrer que la suite de terme général $\sigma_n(f)\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$ converge vers 0.

b. Justifier, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'inégalité $\sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}$.

c. On suppose **désormais** que les coefficients de Fourier b_n de f sont positifs ou nuls. Montrer que la suite de terme général

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) k b_k$$

converge vers 0.

d. Montrer que la suite de terme général nb_n converge en moyenne vers 0.

e. Montrer que la suite de terme général $S_n(f)$ converge uniformément et préciser sa limite.

♦ ♦
♦

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail